

Herleitung des 3. Kepler-Gesetzes

Unter dem Zweikörperproblem versteht man die Bewegung der zwei beteiligten Körper unter dem gegenseitigen Einfluss der Gravitation. Das Zweikörperproblem lässt sich analytisch lösen, d.h. die Bahnen für **verschiedene Fälle** können berechnet werden.

Der Planet bewegt sich auf einer Kreisbahn um einen Zentralkörper

Zunächst werden folgende Annahmen vorausgesetzt:

- Die zentrale Masse ist sehr groß gegenüber der Masse des Planeten
- Die Zentralmasse ruht
- Der Planet beschreibt eine Kreisbahn

Auf einer Kreisbahn sind Gravitation und Zentripetalkraft gleich:

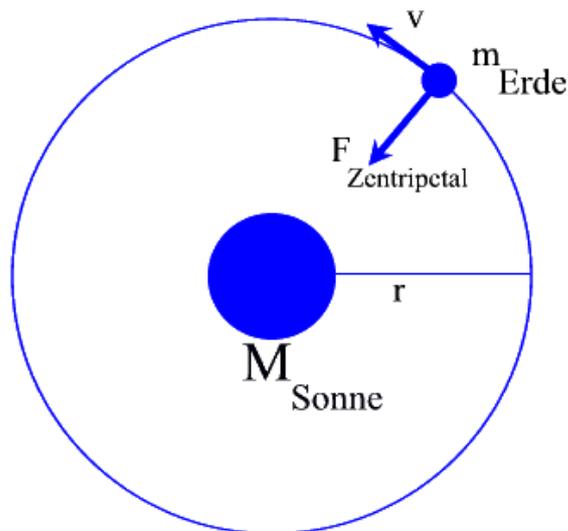
$$F_{\text{Zentripetal}} = F_{\text{Gravitation}}$$

$$G \cdot \frac{m_E m_S}{r^2} = m_E \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r$$

Umformen der Gleichung ergibt:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G m_S}$$

Der Quotient aus dem Quadrat der Umlaufzeiten und der dritten Potenz des Bahnradius ist konstant.

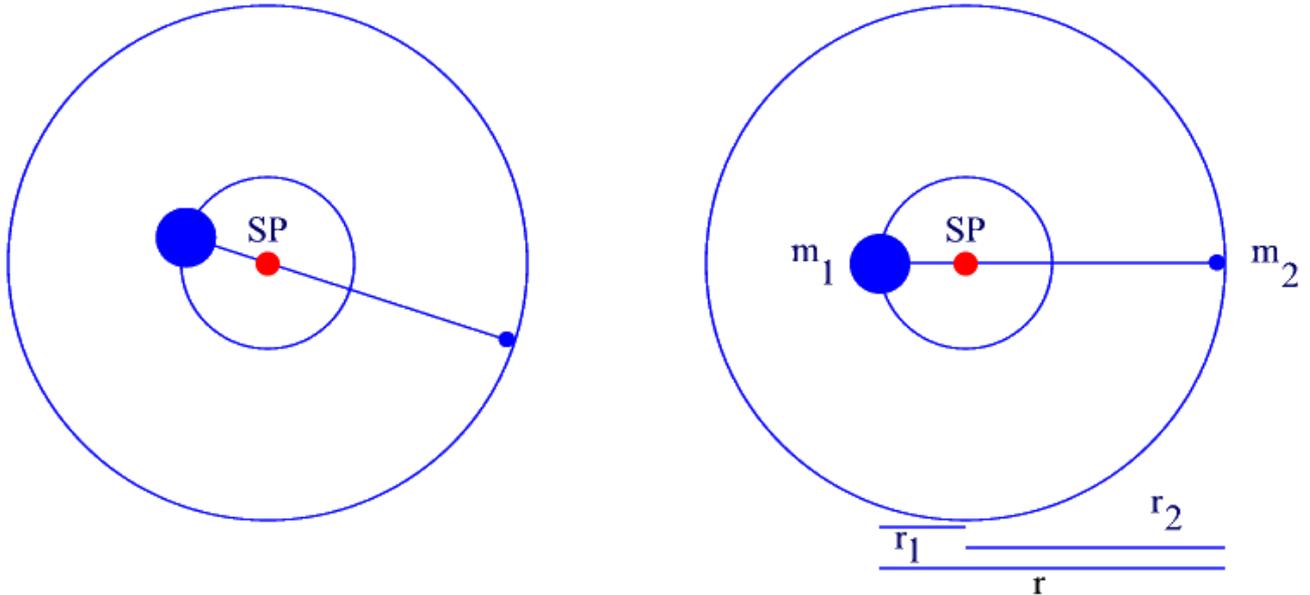


Zentralmasse und Planet bewegen sich um den gemeinsamen Schwerpunkt

Dieses Modell trifft auf das System Erde-Mond und viele Doppelsternsysteme zu.

Die beiden beteiligten Massen bewegen sich auf Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt. Die Radien r_1 und r_2 ergeben sich aus dem Hebelgesetz:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$



Im Kräfteansatz sind bei der Zentripetalkraft diese Radien einzusetzen.

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot (m_1 + m_2)} \quad \text{3. Kepler-Gesetz für das Schwerpunktsystem}$$

Zentralmasse und Planet bewegen sich auf Ellipsen um den Schwerpunkt

Hier ist der Kreisbahnradius durch die große Halbachse zu ersetzen.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot (m_1 + m_2)} \quad \text{Allgemeine Form des 3. Kepler-Gesetzes}$$

In dieser Form ist sowohl die Schwerpunktbewegung als auch die Bewegung auf Ellipsenbahnen beschrieben.

Während die erste Formulierung für einen Zentralkörper nur die Zentralmasse beinhaltet, kann mit der allgemeinen Form des 3. Kepler-Gesetzes auf beide beteiligte Massen geschlossen werden. So ist durch die Bahnanalyse z.B. bei Doppelsternen die Bestimmung der Sternmassen möglich.

